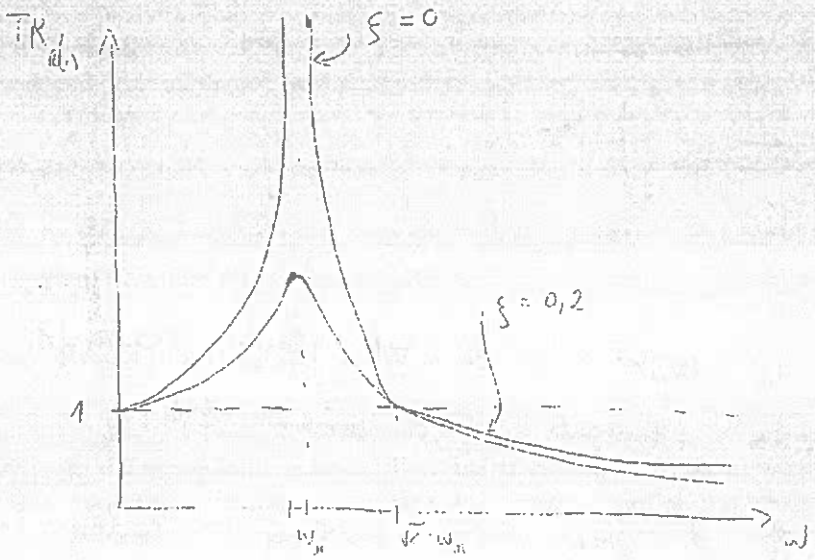
Vibrações e Ruído – Exame 1ª Chamada de [redacted]

[redacted]

1)

a) Transmissibilidade direta, TR_{dir}: representa a transmissão de deslocamento da base para a massa. É o quociente entre a amplitude $X(\omega)$ do movimento da massa e a amplitude Y do movimento da base.

$$TR_{dir} = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



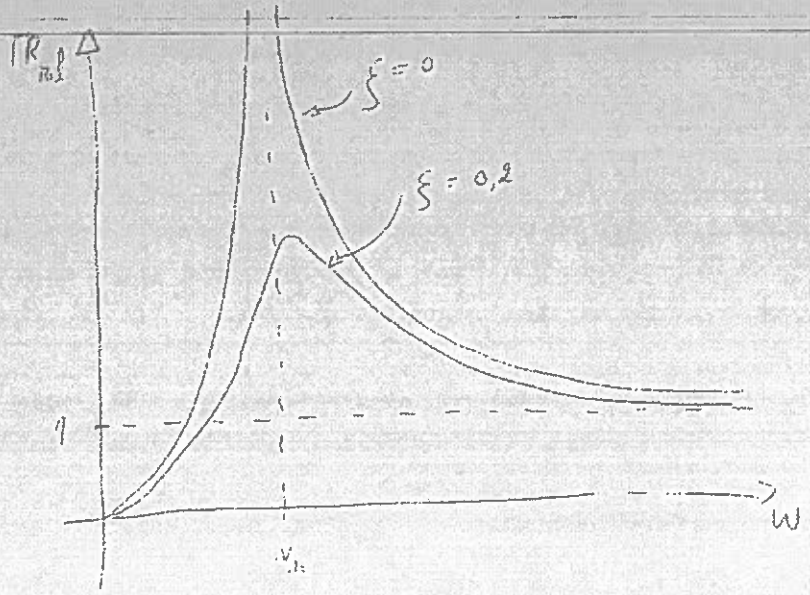
$\omega_n = \omega_n \sqrt{1-\beta^2}$

Comentários:

- Em torno da ressonância a TR é muito sensível ao amortecimento;
- Para $\omega = \sqrt{2}\,\omega_n$ a TR é igual, para qualquer amortecimento, a unidade;
- Para frequências de excitação superiores a $\sqrt{2}\,\omega_n$ quanto maior o amortecimento maior a TR, pelo o comportamento contrário para valores de $\omega < \sqrt{2}\,\omega_n$

b) A transmissibilidade relativa, TR_{rel}, representa a razão entre a amplitude $Z(w)$ do movimento relativo (da massa em relação à base) e a amplitude Y do movimento da base.

$$TR_{rel} = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



(comentários).

→ Naturalmente em torno da ressonância há uma grande sensibilidade da TR_{rel} ao amortecimento (diminuindo com o aumento deste);

→ A tendência para infinito da frequência de excitação conduz à tendência para a unidade da TR_{rel} (independentemente do amortecimento); significando que a massa do apoio praticamente estacionária.

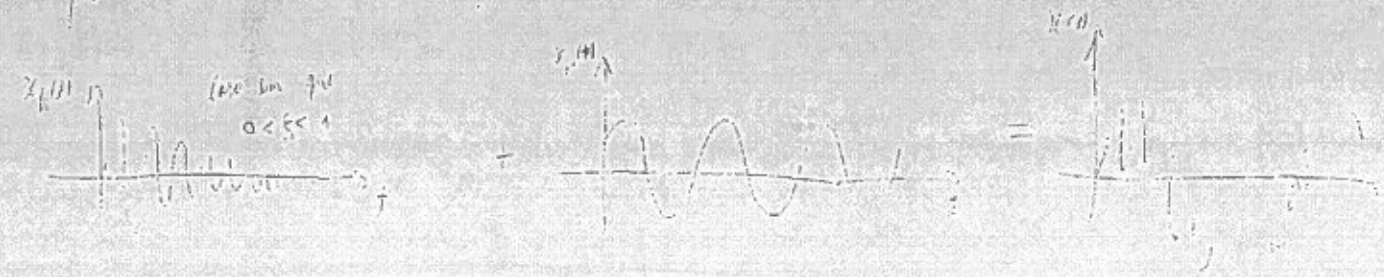
2) a) $$x(t) = X(w)\cos(wt - \phi)$$

$$X(w) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad \phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

A resposta transitória é:

$$x_h(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\right)$$

A resposta do sistema a uma solicitação harmónica tem 2 componentes: uma transitória que corresponde à resposta livre ou natural amortecida do sistema e outra estacionária ou permanente que é harmónica de amplitude $X(\omega)$ e desfasamento ϕ em relação à excitação.



b) A resposta do sistema é obtida através da decomposição da solicitação numa série de Fourier, o que dá origem a uma resposta que ~~termina~~ **cada** resposta cada termo harmónico da série obtida, ficando portanto uma combinação de harmónicos, cada qual com a frequência $p\omega$ (com p sendo a ordem do harmónico) e com um desfasamento próprio. Esta combinação de respostas individuais só é possível através da aplicação do princípio da sobreposição de efeitos.

Características da resposta estacionária

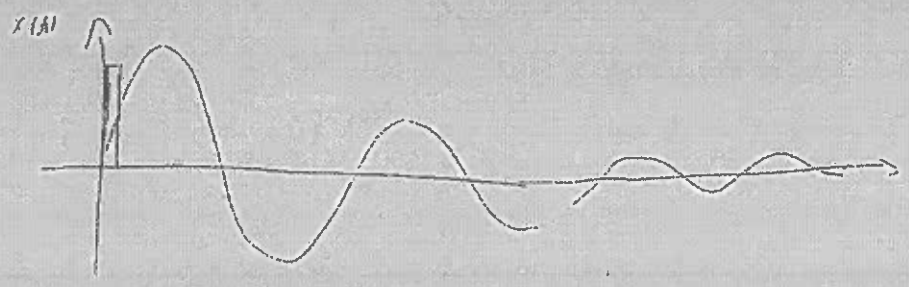
- O um movimento periódico com o mesmo período da solicitação (regime estacionário periódico)

→ A amplitude $X(\omega)$ e o desfasamento ϕ_p de cada harmónico dependem da ordem p.

NOTA: cada harmónico ainda tem o seu associado uma resposta transitória!

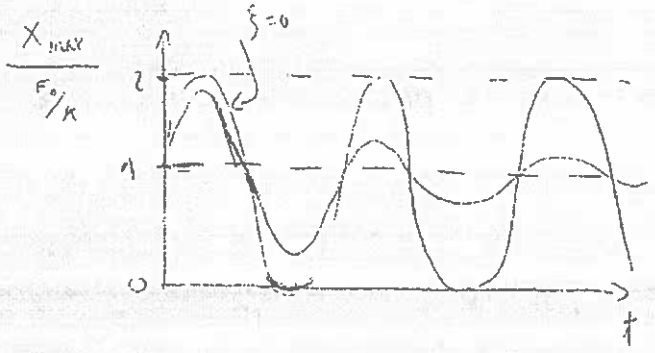
c) A acção do impulso aplicado para $t=0$ é equivalente ao efeito de uma velocidade inicial $v_0 = \frac{\bar{I}}{m}$ e um deslocamento inicial nulo. O movimento provocado pela aplicação do impulso é

e de vibração livre ou natural amortecida do sistema para as condições iniciais referidas anteriormente:



d) A resposta a uma solicitação transiente do tipo "degrau" (ou qualquer outro tipo) pode ser obtida por combinação de uma série de forças impulsivas $f(\gamma)$ actuando durante intervalos de tempo $d\gamma$.

Para o caso da resposta à solicitação em "degrau" verifica-se que a resposta é um movimento harmónico à frequência natural amortecida em torno da posição correspondente ao equilíbrio estático $\frac{F_0}{K}$, e que o valor máximo da amplitude pode atingir o dobro do valor de equilíbrio estático $\left(2\,\frac{F_0}{K}\right)$.



3) $$\alpha(j\omega) = \frac{\bar{X}(j\omega)}{F}$$

$$x(t) = \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t) = j\omega\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

Substituindo na eq. diff. do movimento:

$$\left(-m\omega^2 + j\omega c + K\right)\bar{X}(\omega)\, e^{j\omega t} = F\, e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}(\omega) = \frac{F}{(K - m\omega^2) + j\omega c}$$

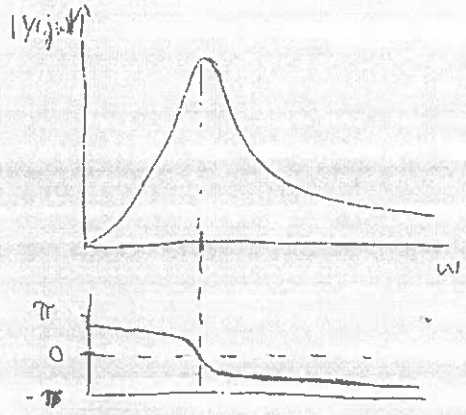
Logo:

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{(K - m\omega^2) + j\omega c} \qquad \text{c.q.d}$$

A resposta em frequência do tipo receptância é uma forma comparta de obtenção das propriedades intrínsecas do sistema relacionando a excitação (unitária) com a resposta (em deslocamento) estacionária do sistema.

b) $$Y(j\omega) = j\omega\,\alpha(j\omega) = j\omega \frac{1}{(K - m\omega^2) + j\omega c}$$

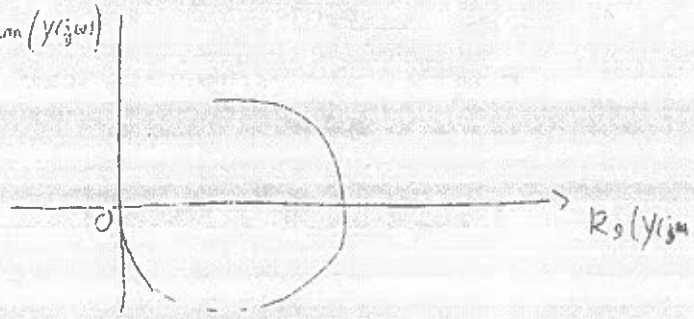
Diagrama de Bode



Máximo para $\omega = \omega_n$

Mudança de fase para $\omega = \omega_n$

Diagrama de Nyquist



Circunferência perfeita

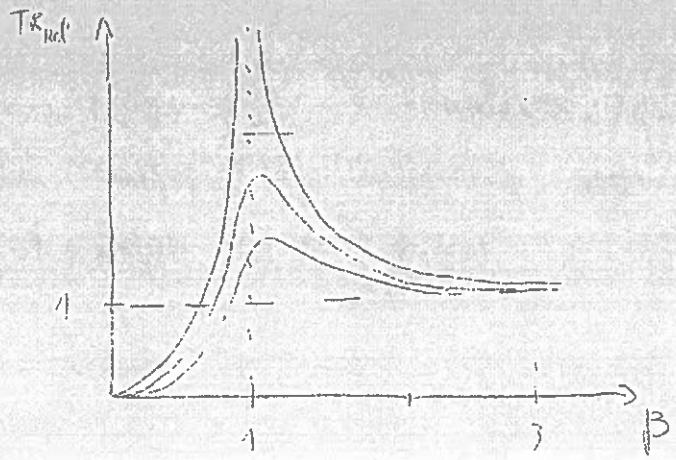
$$\begin{cases} (x_c, y_c) = \left(\frac{1}{2c}, 0\right) \\ r = \frac{1}{2c} \end{cases}$$

4) a), b) Transdutores de deslocamento.

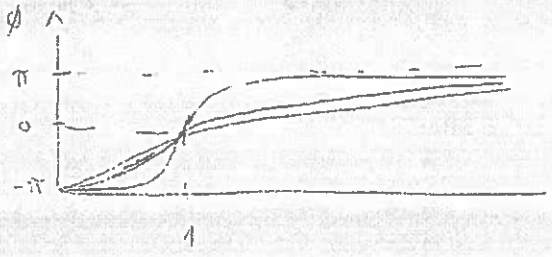
A gama de frequência em que funcionam é $\beta > 3 \Rightarrow w > 3w_n$.

Desta forma a pedir medir frequências de excitação baixas têm de ter uma frequência natural muito baixa, o que implica grandes massas sísmicas e baixa rigidez.

$$TR = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



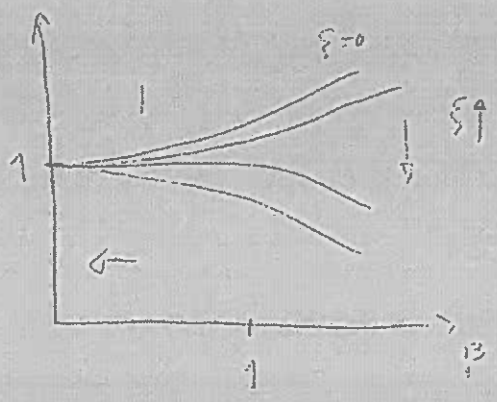
O deslocamento tende para π, pelo que a sua resposta está em oposição de fase (no caso de cargas harmónicas)



Transdutores de aceleração

$$TR = \frac{-w^2 Z(w)}{Y} = \frac{-w^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = -\frac{1}{w_n^2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Se representarmos o gráfico do termo $\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



Portanto verifica-se que os acelerómetros funcionam para β pequeno, havendo a necessidade de aumentar a frequência natural do acelerómetro o que conduz a uma pequena massa sísmica e uma grande rigidez, respectivamente em afinamentos pequenos.

O disparo é, para β baixo e ξ ≈ 0,7, praticamente linear variando de 0 (para β=0) a $\frac{\pi}{2}$ (para β=1), como se vê no gráfico de φ.

5) Não faz

6) Não faz

Parte Prática

1) a) $T_d = \frac{2\pi}{w_d}$

Pelo gráfico: $T_d = \frac{0,1482 - 0,04262}{3} \cong 0,035119(3)$ s

$w_d = \frac{2\pi}{T_d} \cong 178,5334$ rad/s $\quad \rightarrow \quad w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi w_n T \cdot N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{0,2063}{0,0205} = \xi \cdot \left(\frac{178,5334}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 0,035119(3) \times 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi \cong 0,1216$$

b) $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 179,8678$ rad/s $\cong 179,87$ rad/s

c) Diagrama de Corpo Livre:

